Formation CAPES - session 2027

Avant de commencer, faites le point !

***72** exercices diagnostic pour le CAPES Mathématiques*

Clément Boulonne

Préambule

Cette fiche de préparation et de remise à niveau a pour objectif de vous aider à consolider vos connaissances et à progresser efficacement en vue du CAPES de Mathématiques de la session 2027.

Elle rassemble **72** exercices classés en trois grands thèmes : Algèbre, Analyse et Probabilités, afin de vous faire travailler une grande partie des notions essentielles du programme du CAPES.

Grâce à cette fiche, vous pourrez réviser les bases, repérer vos lacunes, renforcer votre méthode de résolution et gagner en assurance avant les épreuves.

Ce support est conçu pour tous les candidats qui souhaitent reprendre les fondamentaux, s'entraîner régulièrement et préparer sereinement la session 2027.

Mais si vous souhaitez aller encore plus loin dans votre préparation, je vous propose une formation CAPES de Mathématiques, dispensée de décembre 2026 à mai 2027, en 4 modules :

1. Remise à niveau sur les Vrai ou Faux
2. Problèmes du CAPES et analyse documentaire
3. Retour sur les sujets de la session 2026
4. Entraînement pour les oraux du CAPES de Mathématiques.

Toutes les informations sur le programme, le déroulé, les modalités et les tarifs sont disponibles ici :

https://capes-cbmaths.fr/formation-capes-externe-maths-session-2027/

Que vous utilisiez cette fiche pour un premier diagnostic ou comme support d'entraînement régulier, elle a vocation à être un tremplin vers la réussite. Utilisez-la, testez-vous, et n'hésitez pas à franchir le pas si vous souhaitez aller plus loin.

Le CAPES se prépare. Et cette préparation commence maintenant !

Si certains exercices vous causent des difficultés ou si vous avez identifié des notions à revoir, vous pouvez également me contacter pour des cours particuliers, au tarif de 40 € pour une heure, sous forme de mini-cours et d'exercices ciblés. C'est l'occasion parfaite de combler vos lacunes et de progresser plus rapidement. Plus d'informations ici :

https://capes-cbmaths.fr/cours-particuliers-niveau-capes-de-mathematiques/

Bon courage pour vos révisions du CAPES !

Votre formateur,
Clément Boulonne

1 Algèbre

Logique, ensembles et applications

Exercice 1

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On donne la proposition (P) suivante : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ ».

1. Donner la négation de la proposition (P).
2. La proposition (P) est-elle équivalente à dire que f est bornée ?

Exercice 2

Soit $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

1. Démontrer que f est une bijection.
2. Déterminer l'application f^{-1} réciproque de f.

Exercice 3

Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \pmod 5$.

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0, puis celle de 1.

Nombres complexes

Exercice 4

On considère l'équation (E) : $z^4 = -8 + 8\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Donner les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-\mathrm{i}}{z-1}$ soit un imaginaire pur.

Exercice 6

1. Linéariser $\cos^4(x)$ en utilisant les formules d'Euler.
2. En déduire une primitive de $x \mapsto \cos^4(x)$.

Arithmétique et polynômes

Exercice 7

1. Déterminer le PGCD de 126 et 230.
2. On note $d = \operatorname{pgcd}(126, 230)$. Trouver un couple d'entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$126u + 230v = d.$$

Exercice 8

Donner le reste de la division euclidienne de 7^{2024} par 11.

Exercice 9

Trouver le reste de la division euclidienne du polynôme $P = X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$ pour $n \geqslant 2$.

Exercice 10

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 1$. Est-ce que le polynôme P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$?
2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 1$. Est-ce que le polynôme P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$?

Groupes

Exercice 11

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

1. Montrer que si H et K sont deux sous-groupes de G, alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2. Est-ce toujours vrai pour $H \cup K$?

Exercice 12

Dans $\mathfrak{S}_5$, on considère la permutation σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Déterminer la signature de σ.

Exercice 13

1. Déterminer tous les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$.
2. Combien y en a-t-il ? (utiliser l'indicatrice d'Euler)

Algèbre linéaire

Exercice 14

Résoudre le système linéaire en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = m \\ x + 4y + 10z = m^2 \end{cases}.$$

Exercice 15

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,0,1)$ forme-t-elle une base ? Si oui, exprimer le vecteur $w = (1,1,1)$ dans cette base.

Exercice 16

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x-y, y+z)$.

1. Déterminer une base de $\ker(f)$ et sa dimension.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et sa dimension.

Exercice 17

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire les valeurs propres de A.
3. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Produit scalaire et espaces euclidiens

Exercice 18

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, transformer la base $\mathcal{B} = ((1,1),(0,1))$ en une base orthonormée.

Exercice 19

Soit F le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

Exercice 20

On considère la matrice :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

M est la matrice d'une isométrie. Laquelle ? Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 21

Soient a_1, …, a_n des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Pour cela, on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Dénombrements

Exercice 22

1. Combien de mots de 5 lettres (ayant un sens ou non) peut-on former avec les lettres du mot « MATHS » sans répétition ?
2. Combien de mots de 5 lettres (ayant un sens ou non) peut-on former avec les lettres du mot « ALGEBRE » sans répétition ?

Exercice 23

Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant exactement un brelan (trois cartes de même valeur, et les deux autres de valeurs différentes du brelan et différentes entre elles) ?

Exercice 24

Soit E un ensemble à n éléments et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

2 Analyse

Suites et séries numériques

Exercice 25

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble :

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, x \in B\}.$$

Démontrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 26

Déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 27

Soit (u_n) une suite bornée telle que toutes ses sous-suites convergentes ont la même limite L. Montrer que (u_n) converge vers L.

Exercice 28

Étudier la convergence de la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Exercice 29

Dans chaque cas, déterminer la nature de la série de terme général u_n.

1. $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$
2. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 30

Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ possède une unique solution réelle dans $[0;1]$.

Exercice 31

Soit f une fonction dérivable sur $[a;b]$ telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) + kf(c) = 0$.

Exercice 32

1. Montrer que, pour tous $x, y > 0$:

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}.$$

2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{xy}.$$

Exercice 33

Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x)}{\sin(x)}.$$

En déduire la limite en 0.

Exercice 34

On dit que la fonction f est uniformément continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2, \qquad |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que la fonction racine carrée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est uniformément continue.

Fonctions de deux variables et courbes

Exercice 35

Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 36

Déterminer les points critiques de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et préciser leur nature (maximum, minimum, point selle).

Exercice 37

Calculer le gradient de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ au point $(1, 1)$. Tracer la ligne de niveau passant par ce point.

Exercice 38

Soit la courbe paramétrée par $F(t) = (x(t), y(t))$ où :

$$x(t) = \cos^3(t) \quad \text{et} \quad y(t) = \sin^3(t).$$

Étudier la fonction F (domaine, régularité, dérivées, réduction éventuelle de l'intervalle d'étude, variations conjointes, tangentes, symétrie et forme globale) et tracer sa courbe représentative.

Intégration et équations différentielles

Exercice 39

Calculer la limite de la série numérique $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 40

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 41

Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 42

Résoudre l'équation différentielle $y' - 2xy = x$ avec condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 43

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$.

Suites et séries de fonctions

Exercice 44

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite des fonctions de terme général :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \quad \text{sur } [0; 1].$$

Exercice 45

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$.

Exercice 46

Donner le développement en série entière en 0 de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ puis en déduire celui de $\arctan(x)$.

Calcul numérique

Exercice 47

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points $(0,1)$, $(1,3)$ et $(2,2)$.

Exercice 48

Appliquer une itération de la méthode de Newton pour $f(x) = x^2 - 2$ en partant de $x_0 = 1{,}5$.

3 Probabilités

Probabilités (conditionnelles), indépendance

Exercice 49

On tire une carte dans un jeu classique de 32 cartes. Soit A l'événement « tirer un cœur » et B « tirer un roi ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. En déduire $\mathbb{P}(A \cup B)$ et formuler cet événement par une phrase.

Exercice 50

On lance deux dés équilibrés à 6 faces. Soit E_1 l'événement « le premier dé donne 6 » et E_2 l'événement « la somme des deux dés vaut 7 ».
Ces deux événements sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 51

Une usine fabrique des pièces à l'aide de deux machines M_1 et M_2. M_1 produit 60 % des pièces et 5 % de sa production est défectueuse. M_2 produit 40 % des pièces et 2 % de sa production est défectueuse.
On choisit une pièce au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2. On constate que la pièce choisie est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1 ?

Exercice 52

Un laboratoire pharmaceutique a mis au point un nouveau test de dépistage pour une maladie donnée. Des études cliniques ont permis d'établir les données suivantes concernant la fiabilité de ce test et la propagation de la maladie :

— la maladie touche 2 % de la population totale (prévalence) ;

— si une personne est malade, le test est positif dans 95 % des cas (sensibilité) ;

— si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 97 % des cas (spécificité).

On choisit une personne au hasard dans la population. On définit les événements suivants :

M : « la personne est malade » ;

T^+ : « le test de la personne est positif » ;

T^- : « le test de la personne est négatif ».

Questions :

1. Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilités ($\mathbb{P}(M)$, $\mathbb{P}_M(T^+)$, etc.) puis construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif, notée $\mathbb{P}(T^+)$, est égale à 0,0484.
3. Un patient passe le test et apprend que celui-ci est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit réellement malade ? (Calculer $\mathbb{P}_{T^+}(M)$ en arrondissant au centième).
4. Interprétation : ce résultat correspond à ce qu'on appelle la *Valeur Prédictive Positive* (VPP) du test. Que pouvez-vous conclure quant à la fiabilité réelle de ce test pour le patient ? Comment expliquer ce phénomène paradoxal ?

Variables aléatoires

Exercice 53

Un jeu consiste à miser 2 € puis à lancer un dé équilibré à 6 faces. Si le résultat est 6, on gagne 10 €. Si le résultat est 4 ou 5, on gagne 3 €. Si le résultat est 4 ou 5, on gagne 3 €. Sinon, on ne gagne rien.
Soit X le gain algébrique (gain final moins la mise).

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$ et la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.
3. Le jeu est-il équitable ?

Variables aléatoires discrètes

Exercice 54

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire un jeton au hasard.
Soit Y la variable aléatoire donnant le numéro tiré.

1. Quelle est la loi de Y ?
2. Calculer son espérance et son écart-type.

Exercice 55

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins. Quelle est la probabilité des événements :
   - A : « Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent. » ;
   - B : « Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent » ?
2. Soit X la variable aléatoire : « nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres ».
   (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

(b) Quelle est son espérance ?

(c) Quelle est sa variance ?

Exercice 56

À un guichet, le temps d'attente exprimé en secondes est 1, 2, ..., 600, ces six cents temps d'attente étant équiprobables. On appelle T la variable aléatoire donnant le temps d'attente à ce guichet en seconde.

1. Quelle est la loi suivie par T ?
2. Calculer la probabilité qu'on attende 3 minutes ou plus ?
3. Sachant qu'elle a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité que Fabienne attende moins de 4 minutes ?

Exercice 57

Le nombre de clients entrant dans une boulangerie suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$ par quart d'heure.

1. Quelle est la probabilité que 6 clients entrent dans le prochain quart d'heure ?
2. Quelle est la probabilité que personne n'entre durant un quart d'heure donné ?

Exercice 58

Le nombre de défauts sur un rouleau de tissu suit une loi de Poisson. On sait que l'espérance de défauts par rouleau est de 2,5.

1. Quelle est la variance du nombre de défauts ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un défaut sur un rouleau ?

Variables aléatoires à densité

Exercice 59

Un bus passe à un arrêt toutes les 20 minutes exactement. Un usager arrive à l'arrêt à un instant aléatoire. Soit T son temps d'attente en minutes. On modélise T par une loi uniforme sur $[0; 20]$.

1. Calculer la probabilité qu'il attente plus de 15 minutes.
2. Calculer le temps d'attente moyen et la variance de T.

Exercice 60

La responsable d'un laboratoire de Physique d'un lycée a acheté un spectromètre en septembre 2012.
On admet que la durée de vie d'un spectromètre peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que la probabilité qu'un spectromètre fonctionne plus de 8 ans est égale à 0,42.

1. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ et montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-2} près est égale à 0,11.

   On utilisera cette valeur dans la suite de l'exercice.

2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 10)$ et interpréter le résultat.
3. Quelle est la probabilité que le spectromètre fonctionne encore en septembre 2020 ?
4. Au mois de septembre 2020, le spectromètre fonctionne toujours. Mais, inquiète des risques de dysfonctionnement de cet appareil durant l'année scolaire, la responsable du labo calcule la probabilité qu'il fonctionne encore au mois de mars 2021. Quel résultat trouve-t-elle ? Est-ce rassurant ?
5. Donner une estimation de la durée de vie moyenne d'un spectromètre.

Exercice 61

Le poids X en grammes de paquets de farine suit une loi normale d'espérance $\mu = 1\,000$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. Calculer $\mathbb{P}(990 \leqslant X \leqslant 1\,010)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X > 1\,020)$.

Exercice 62

Une machine remplit des bouteilles d'eau. Le volume versé suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, 2^2)$. Quelle doit être la valeur du réglage moyen μ pour que la probabilité d'avoir une bouteille contenant moins de 50 cl soit égale à 0,01 ?

Série statistique à une variable

Exercice 63

Voici les notes obtenus par un groupe de 11 élèves :

`5, 8, 8, 10, 11, 12, 12, 14, 15, 16, 19.`

1. Calculer la moyenne de cette série statistique.
2. Calculer la médiane de cette série statistique.
3. Comment interpréter la différence entre ces deux valeurs ?
4. Déterminer l'étendue de la série.
5. Calculer la variance puis l'écart-type (arrondi au dixième).

Exercice 64

Ce tableau présente la hauteur, en millimètre, des précipitations quotidiennes au cours du mois d'avril 2026, sur l'aéroport Roland Garros de l'île de La Réunion.

Hauteur des précipitations (en millimètre)	0	0,3	1,3	1,7	2,5	7	13	21	28	42
Nombre de jours	4	6	4	4	3	3	2	1	2	1

1. Calculer la valeur moyenne des précipitations journalières au cours du mois d'avril 2026, arrondie au dixième de millimètre.
2. Déterminer la valeur médiane de ces précipitations journalières. Interpréter ce résultat par une phrase.
3. Quelle est l'étendue de cette série ?

4. Déterminer le nombre de jours où la hauteur des précipitations est supérieure ou égale à 13 mm, puis exprimer ce nombre en pourcentage par rapport au nombre de jours dans le mois.
5. Sachant qu'une des pistes de décollage de l'aéroport Roland Garros est rectangulaire et mesure 3 200 m de long et 50 m de large, calculer, en mètre cube, puis en litre, le volume de pluie tombé sur cette piste au cours du mois d'avril 2026.

Exercice 65

Les salaires mensuels nets (en euros) dans une petite entreprise sont les suivants :

`1500, 1550, 1600, 1650, 1800, 1900, 2100, 2500, 3200, 4500.`

1. Faire un diagramme en moustache pour représenter cette série statistique.
2. Calculer l'écart interquartile et expliquer ce que cette valeur représente concrètement.

Exercice 66

Une enquête sur l'âge de 50 participants à un séminaire donne les résultats suivants :

Âge	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$
Nb. de personnes	10	25	15

Estimer l'âge moyen et l'écart-type de ce groupe en utilisant le centre des classes.

Série statistique à deux variables

Exercice 67

Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone.

Teneur en carbone : x_i	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Charge de rupture (en kg) : y_i	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$. On prendra en abscisse 1 cm pour une unité en représentant les abscisses à partir de la valeur 60.

   On prendra en ordonnées 1 cm pour 2 kg, en représentant les ordonnées à partir de 70.
2. Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage.
3. Déterminer la valeur approchée à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables x et y. Interpréter ce résultat.
4. Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ de la droite $\mathcal{D}$ de régression de y en x par la méthode des moindres carrées. On donnera les valeurs approchées des coefficients a et b à 10^{-3} près.

   Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique de la question 1.
5. Un acier a une teneur en carbone de 77. Donner une estimation de sa charge de rupture.

Exercice 68

Une chaîne de magasins commercialise un certain modèle de perceuses ; elle souhaite étudier l'évolution du nombre de perceuses vendues en fonction du nombre de magasins dans lesquels ce modèle est proposé. Le tableau suivant présente cette évolution.

Nombre de magasins : x_i	15	40	70	90	100	150
Nombre de perceuses vendues : y_i	60	254	362	504	615	810

On décide d'ajuster cette série statistique à deux variables par la méthode des moindres carrés.

1. Déterminer à l'aide d'une calculatrice une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = mx + p$, avec m et p arrondis à 10^{-2}.
2. En déduire une estimation du nombre de perceuses vendues, si la chaîne présente celles-ci dans 120 magasins.

Exercice 69

On a relevé le nombre d'automobiles produites par une grande firme européenne, pendant huit années consécutifs, dans un pays émergent. Les résultats figurent dans le tableau suivant.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'automobilistes produites : y_i	54 000	56 000	70 000	80 000	87 500	112 922	138 907	149 675

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine du repère le point de coordonnées $(0, 50\,000)$ et pour unités deux centimètres pour une année sur l'axe des abscisses et cinq centimètres pour 5 000 automobiles sur l'axe des ordonnées.
2. Un ajustement affine n'étant pas adapté au nuage précédent, on pose $z = \ln(y)$.
   (a) Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
z	10,897							

   On fera figurer les valeurs approchées de z arrondis à 10^{-3}.

   (b) Écrire une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = mx + p$. On donnera les valeurs approchées de m et p arrondies à 10^{-3}.

   (c) On admet que la tendance observée pendant les huit années va se poursuivre. Donner une estimation de la production au cours de l'année de rang 11.

Exercice 70

Une entreprise fabrique et commercialise un produit rare. Sa production mensuelle, qui ne peut excéder 7 tonnes, est notée X (en tonnes) ; le coût total de cette production mensuelle est noté Y (en k€).

On rappelle que 1 k€ $= 10^3$ €. On pose $Z = \mathrm{e}^{\frac{100-Y}{25}}$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant après l'avoir reproduit. Les valeurs approchées de Z seront arrondies à 10^{-2}.

X	1	2	3	4	5	6
Y	19,2	20,1	27,5	32,2	40,6	57,3
Z	25,33					

2. Déterminer les coefficients de corrélation entre X et Y d'une part, entre X et Z d'autre part. Arrondir à 10^{-3}. Commenter les résultats obtenus.
3. Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X (On arrondira chacun des coefficients à 10^{-2}).
4. Utiliser le résultat de la question précédente pour obtenir une expression de Y en fonction de X.
5. Déduire de la question 4 une estimation du coût total pour une production de 7 tonnes. Arrondir à l'euro.

Algorithmique

Exercice 71

Écrire un programme Python qui permet de saisir les notes d'une classe et d'en faire une analyse statistique.
Le programme doit :

1. demander à l'utilisateur le nombre d'élèves (au moins 1) ;
2. saisir les notes (entre 0 et 20) dans une liste (si une note est hors intervalle, on la redemande) ;
3. calculer et afficher :
   (a) la moyenne de la classe (arrondie à 2 décimales) ;
   (b) la note la plus haute et la note plus basse ;
   (c) le nombre d'élèves ayant la moyenne ($\geqslant 10$) ;
   (d) le pourcentage d'élève admis (avec la moyenne) ;
4. afficher toutes les notes strictement supérieures à la moyenne, avec leur position (numéro de l'élève).

Exercice 72

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On dispose d'une liste de nombres entiers quelconques. L'objectif est de regrouper ces nombres selon leur reste dans la division euclidienne par n, c'est-à-dire selon leur classe de congruence modulo n.
Écrire un programme Python qui réalise ce tri.
Pour cela, le programme devra :

1. demander à l'utilisateur la valeur de n (avec $n \geqslant 2$) ;
2. parcourir une liste de nombres entiers donnée ;
3. créer n listes vides, chacune correspondant à un reste possible (de 0 à $n-1$) ;
4. placer chaque nombre dans la liste correspondant à son reste modulo n ;
5. afficher les n listes obtenues de manière claire.

Indication : on pourra commencer par tester le programme avec $n = 2$, ce qui correspond au tri classique des nombres pairs et impairs.